球面およびトーラス面から対称空間への調和写像の分類問題 : 解説と未解決問題 (極小曲面論とその周辺領域の総合的研究)

宇田川, 誠一; 大仁田, 義裕

数理解析研究所講究録
1113巻 1999年 44-64

球面およびトーラス面から対称空間への調和写像の分類問題（解説と未解決問題）

宇田川　誠一（日本大学医学部）
Seiichi UDAGAWA

大仁田　義裕（東京都立大学理学研究科）
Yoshihiro OHNITA

序

リーマン面からリー群や対称空間への調和写像の方程式は, スペクトラル径数を持つ零曲率表示, ラックス方程式表示, ゲージ理論的方程式による定式化という一般のリーマン多様体への調和写像にはない特徴を持つ。そこで, 可積分系理論の観点から, そのような調和写像を研究する意義はある。コンパクト・リーマン面からコンパクト対称空間への調和写像の構造・分類は一般的に困難な問題である。本稿の目的は, ジーナス0および1のコンパクト・リーマン面からコンパクト対称空間への分類問題についての解説と残されている未解決問題を与えることである。ジーナス2以上のコンパクト・リーマン面の場合は, まだ一般的な「強い」理論は知られていない。最近, ゲージ理論的試みは, [MO] でなされている。

§1 記号

特に断らない限り, 以下の設定で記号を用いる：

M ：コンパクト・リーマン面,　TM : M の接束 (tangent bundle),

T^*M : M の余接束 (cotangent bundle),　G : コンパクト半単純 (semisimple) リー群,

$G^{\mathbf{C}}$: リー群 G の複素化,　$\mathcal{G}$: G のリー環,

G/K ：コンパクト対称空間,　G/H : 簡約可能 (reductive) 等質空間

$G_k(\mathbf{C}^n)$: $\mathbf{C}^n$ の複素 k-次元部分空間全体のなす複素グラスマン多様体,

$\mathbf{C}P^{n-1} = G_1(\mathbf{C}^n)$: (Fubini-Study 計量をもつ) $(n-1)$-次元複素射影空間

§2 リーマン球面からコンパクト対称空間への調和写像

C^∞-調和写像 $\varphi : M \longrightarrow G/K$ を考える。

§2.1 $[M = S^2, G/K = S^n$ **の場合**]
この場合は, [Cal67], [Cal67-2], [Ch70], [Bar75] により分類された。

§2.2 $[M = S^2, G/K = \mathbf{C}P^{n-1}$ **の場合**]
この場合は, [EW83], [Bns82], [Wol85] らによって分類された。その方法は, Harmonic sequence という概念を用いるものであった。実際, より一般に, 調和写像 $\varphi : S^2 \longrightarrow G_k(\mathbf{C}^n)$ が与えられたとき, 階数 k の恒等的ベクトル束 (tautological vector bundle) $T_k \to G_k(\mathbf{C}^n)$ の φ による引き戻しを $\underline{\varphi} \to S^2$ で表す。すなわち, $\underline{\varphi}$ の点 $x \in S^2$ におけるファイバーは $\underline{\varphi}_x = \varphi(x)$ により与えられる。S^2 上の自明束 $\underline{\mathbf{C}^n} = S^2 \times \mathbf{C}^n$ を考え, 標準的な Hermite ファイバー計量 h とそれから定まる Hermite 接続を入れておく。このとき, $\underline{\varphi}^\perp$ により, 各ファイバー $\underline{\varphi}_x^\perp$ が $\mathbf{C}^n$ における $\underline{\varphi}_x$ の h に関しての Hermite 直交補空間になっている, S^2 上のベクトル束を表す。このとき, $\mathrm{Hom}(\underline{\varphi}, \underline{\varphi}^\perp)$ は $G_k(\mathbf{C}^n)$ の正則接束の φ による引き戻しと正則同型かつ等長的にできる。この場合, $\mathrm{Hom}(\underline{\varphi}, \underline{\varphi}^\perp)$ には, Koszul-Malgrange の正則構造を入れておく。このとき, $d\varphi = \partial\varphi + \overline{\partial}\varphi, \partial\varphi = \partial\varphi^{1,0} + \partial\varphi^{0,1}$ と分解したとき, $\partial\varphi^{1,0}$ は正則ベクトル束 $T^*M^{1,0} \otimes \mathrm{Hom}(\underline{\varphi}, \underline{\varphi}^\perp)$ の正則切断になることが, C^∞–写像 φ が調和写像になるための必要十分条件である。写像 $\partial\varphi^{1,0} : TM^{1,0} \otimes \underline{\varphi} \longrightarrow \underline{\varphi}^\perp$ の image は, $\partial\varphi^{1,0}$ の階数の最大値を l とするとき, $\wedge^l \partial\varphi^{1,0}$ の孤立零点からなる有限集合（Mの divisor D を定める）を除いて正則ベクトル束 ($M \times \mathbf{C}^n$ の正則部分束ではない) を定めるが, D で定義される正則直線束 $\mathcal{O}(D)$ を用いて, M 全体に image を拡張できる。実際, δ を $\mathcal{O}(D)$ の自然な正則切断とする。すなわち, δ の零点集合は D で与えられる。このとき, $\wedge^l \partial\varphi^{1,0} \otimes \frac{1}{\delta} : \otimes^l TM^{1,0} \otimes \Lambda^l \underline{\varphi} \longrightarrow \Lambda^l \underline{\varphi}^\perp$ の image は M 全体で定義される正則ベクトル束になり decomposable であるから, $\partial\varphi^{1,0}$ の image は M 全体で定義された $\underline{\varphi}^\perp$ の階数 l の部分束に拡張される。これを, 調和写像 φ から定まる Gauss 束と呼び, $G'(\varphi)$ で表す。$G'(\varphi) = \varphi_1^* T_l$ となるような写像 $\varphi_1 : M \longrightarrow G_l(\mathbf{C}^n)$ $(l \leq k)$ は再び調和写像になる。以下, $k = 1$ とする。Gauss 束を作る操作を繰り返し行い, 例えば j回行ったとして, j回目に作った Gauss 束を最初の φ から j番目の調和写像ということを強調して $G^{(j)}(\varphi)$ で表す。$\underline{\varphi}$ と $G^{(1)}(\varphi)$ は定義から h に関して直交している。さて $\underline{\varphi}$ と直交していない Gauss 束があったとする。そのようなもののなかで最小の番号 j_0 をもつもの $G^{(j_0)}(\varphi)$ を考える。このとき, Hermite 直交射影 $p : G^{(j_0)}(\varphi) \longrightarrow \underline{\varphi}$ は正則写像であり, 合成

写像 $A_\varphi := p\circ\partial\varphi^{1,0}_{j_0}\circ\partial\varphi^{1,0}_{j_0-1}\circ\cdots\circ\partial\varphi^{1,0}_1\circ\partial\varphi^{1,0}$ は $\mathrm{End}(\underline{\varphi})$ に値をとる正則微分形式になる。しかるに, $\mathrm{End}(\underline{\varphi})$ は自明直線束であり, $M=S^2$ 上に大域的正則微分形式はゼロのみであるから, 結局, 射影 $p: G^{(j_0)}(\varphi)\longrightarrow\underline{\varphi}$ は恒等的にゼロであることがわかり, $G^{(j_0)}(\varphi)$ は恒に $\underline{\varphi}$ に直交していることがわかる。従って, ある $s\in\mathbf{N}$ が存在して, $G^{(s)}(\varphi)=0$ となる。これは $G^{(s-1)}(\varphi)$ に対応する写像が反正則写像であることを意味するから, これまでの操作を逆に行い, M の向き付けを逆にしておけば, 最初に与えられた調和写像 $\varphi: M=S^2\longrightarrow\mathbf{C}P^{n-1}$ は, ある正則写像 $\psi: M=S^2\longrightarrow\mathbf{C}P^{n-1}$ より, Gauss 束を何回かとる操作により得られることがわかる。

§**2.3** $[M=S^2, G/K=G_k(\mathbf{C}^n)$ **の場合**$]$

この場合は, [BW86], [BS87], [ChW87], [Wol88] 等の仕事がある。[BW86] の方法は, 上記の $\mathbf{C}P^{n-1}$ の場合の方法を拡張したものであり, 同様に, $\mathrm{End}(\varphi)$ に値をもつ正則微分形式を得る。しかし, この場合, その切断はゼロとは限らないので困難がある。$\underline{\varphi}$ と Hermite 直交していないような Gauss 束 $G^{(r)}(\varphi)$ のなかで最小の正整数 r を 調和写像φ の isotropy order とよぶ。このときに, 上記のようにして得られる $\mathrm{End}(\underline{\varphi})$-値の正則切断を, A^r_φ で表すと, A^r_φ はベキゼロであることがわかるので, $V=\underline{\varphi}\ominus\mathrm{Im}A_\varphi\oplus\mathrm{Im}(\partial\varphi^{1,0}\,|_{\mathrm{Im}A_\varphi})$ によりベクトル束 V を定める。この V に対応する 調和写像 φ_1 が得られることがわかる。$k=2$, すなわち, $G_2(\mathbf{C}^n)$ の場合には, S^2 上に正則微分形式がゼロのみであることを利用することにより, φ_1 の isotropy order は, φ の isotropy order よりも少なくとも 1 つ増えることが示される。この方法を繰り返すことにより, ある l回目の操作において得られた 調和写像 φ_l は, ある正整数 s_i, s_j が存在して,

(1) $\mathrm{rank}G^{(s_i)}(\varphi_l)=0$,

(2) $\mathrm{rank}G^{(s_j)}(\varphi_l)=1$,

という状況が起こり得る。ここで, s_i, s_j は (1) または (2) が起こる様な最小の正整数とする。(1) では, φ はある正則写像 $\psi: S^2\longrightarrow G_2(\mathbf{C}^n)$ から逆構成されることがわかる。(2) では, ある調和写像 $\varphi_0: S^2\longrightarrow\mathbf{C}P^{n-1}$ から, まず, extension と呼ばれる方法で調和写像 $\varphi^0: S^2\longrightarrow G_2(\mathbf{C}^n)$ を作り, これから逆構成して元の φ が得られる。実際, $\underline{\mathbf{C}}^n\ominus(G^{(s_j)}(\varphi_l)\oplus G^{(s_j+1)}(\varphi_l))$ の適当な反正則直線束 U を用いて, $\underline{\varphi}^0=U\oplus G^{(s_j)}(\varphi_l)$ により φ^0 は得られる。

$k=3,4$ についても同様の議論を適用できるが, 状況はかなり複雑になってくる。一般の k に対しては, [BS87] が Harder-Narasimhan filtration を用いて, ベクトル束の Chern 数が減少することを導き, 正則写像から逆構成できることを示した。そのすぐ後, [Wol88] は, 与

えられた調和写像 $\varphi : S^2 \longrightarrow G_k(\mathbf{C}^n)$ の Gauss 束を, $\underline{\varphi}$ に Hermite 直交していようがいまいが構わず, どんどん作っていくと, いずれ, ある正整数 r があって $\mathrm{rank}\underline{\varphi} > \mathrm{rank}G^{(r)}(\varphi)$ となることを示した。Wolfson の方法を説明しよう。$\overline{\partial}\varphi^{1,0} : TM^{0,1} \otimes \underline{\varphi} \longrightarrow \underline{\varphi}^{\perp}$ の image として得られる Gauss 束も, $G^{(i)}(\varphi)$ の場合と同様に定義され, 調和写像を定める。そこで, $G^{(i)}(\varphi)$ が定める調和写像を φ_i とすると, $\partial\varphi_i^{1,0}$ の image が $G^{(i+1)}(\varphi)$ であり, $\overline{\partial}\varphi_i^{1,0}$ の image が $G^{(i-1)}(\varphi)$ である。なぜならば, 適当な基底に関するそれぞれの行列表示は, $\overline{\partial}\varphi_i^{1,0} = (\partial\varphi_{i-1}^{1,0})^*$ を満たすからである。ここで, φ_{i-1} は $G^{(i-1)}(\varphi)$ が定める調和写像である。記号を簡略化するために, $\partial_i = \partial\varphi_i^{1,0}, \overline{\partial}_i = \overline{\partial}\varphi_i^{1,0}$ とおくとき,

$$\xrightarrow{\partial_{i-1}} G^{(i)}(\varphi) \xrightarrow{\partial_i} G^{(i+1)}(\varphi) \xrightarrow{\partial_{i+1}}$$
$$\xleftarrow{\overline{\partial}_i} G^{(i)}(\varphi) \xleftarrow{\overline{\partial}_{i+1}} G^{(i+1)}(\varphi) \xleftarrow{\overline{\partial}_{i+2}}$$

となっている。

$$c_1(G^{(i)}(\varphi)) = -\deg(G^{(i)}(\varphi)) = -\int_M (|\,\partial_i\,|^2 - |\,\overline{\partial}_i\,|^2) \tag{2.1}$$

である。２番目の等式は, $G_k(\mathbf{C}^n)$ のケーラー計量を適当に正の定数倍することにより得られる。ここで, $\overline{\partial}_i = (\partial_{i-1})^*$ であったから, $|\,\partial_{i-1}\,|^2 = |\,\overline{\partial}_i\,|^2$ が成り立っている。従って,

$$c_1(G^{(i)}(\varphi)) = \int_M (|\,\partial_{i-1}\,|^2 - |\,\partial_i\,|^2) \tag{2.2}$$

を得る。いま, すべての Gauss 束は階数が $k(=\mathrm{rank}(\underline{\varphi}))$ であると仮定する。写像 $\wedge^k\partial_{i-1} : \Lambda^k G^{(i-1)}(\varphi) \longrightarrow \Lambda^k G^{(i)}(\varphi) \otimes (\otimes^k T^*M^{1,0})$ は正則直線束の間の正則写像であり, その孤立零点集合を D_{i-1} とする。以前のように, $\mathcal{O}(D_{i-1})$ の自然な正則切断を δ とすれば,

$$\wedge^k \partial_{i-1} \otimes \frac{1}{\delta} : \Lambda^k G^{(i-1)}(\varphi) \otimes \mathcal{O}(D_{i-1}) \longrightarrow \Lambda^k G^{(i)}(\varphi) \otimes (\overset{k}{\otimes} T^*M^{1,0})$$

は正則直線束の間の正則同型写像を与える。従って,

$$c_1(G^{(i)}(\varphi)) = c_1(G^{(i-1)}(\varphi)) + \deg(D_{i-1}) + k(2-2g) \tag{2.3}$$

ここで, g は M のジーナスであり, $\deg(D_{i-1}) \geq 0$ である。(2.3) と (2.2) により,

$$\begin{aligned}
&(s+1)c_1(\underline{\varphi}) + \sum_{j=1}^{s}\sum_{p=0}^{j-1}\deg(D_p) + s(s+1)k(1-g) \\
&= \sum_{i=0}^{s} c_1(G^{(i)}(\varphi)) \\
&= \int_M (|\,\partial_{-1}\,|^2 - |\,\partial_s\,|^2) < \int_M (|\,\overline{\partial}_0\,|^2 + |\,\partial_0\,|^2) = \mathrm{E}(\varphi)
\end{aligned}$$

ここで, $\mathrm{E}(\varphi)$ は写像 φ のエネルギーである。とくに, $g=0$ ならば, これが任意の $s \in \mathbf{N}$ に対して成り立つことは有り得ないので（ある s で $c_1(\underline{\varphi})+sk>0$ となり, さらに s の値を増やせばやがて $\mathrm{E}(\varphi)$ の値を越えるので）, 結局, ある $s_0 \in \mathbf{N}$ が存在して, $\mathrm{rank}(G^{(s_0)}(\varphi))<k$ となる。これを繰り返して行けば, ある反正則写像 $\psi : S^2 \longrightarrow G_l(\mathbf{C}^n), (k \geq l \geq 1)$ にたどり着く。従って, 以前のようにある正則写像から逆構成可能である。$g=1$ の場合は, $\overline{\partial}_{-i}$ について同様のことを行うと, $\deg(\underline{\varphi}) \neq 0$ ならば, $\mathrm{rank}(G^{(s_0)}(\varphi))<k$ となる $s_0 \in \mathbf{N}$ または, $-s_0 \in \mathbf{N}$ が存在することが示される。しかし, この場合 $\deg(\varphi_{s_0}) \neq 0$ かどうかは不明なので, これは逆構成を与えていない。

§**2.4** $[M=S^2, G/K=G_k(\mathbf{C}^n)$ or $U(n)$ **の場合**]

この場合は, [Uhl89] によりユニトンという概念を用いて, 与えられた調和写像を「ユニトン因子」と呼ばれるグラスマン多様体への写像たちの積に分解する factorization theorem を確立することにより得られた。$G_k(\mathbf{C}^n)$ を Cartan 埋め込みにより $U(n)$ に埋め込んでおき, $\pi : \mathbf{C}^n \longrightarrow \mathbf{C}^k$ を Hermite 直交射影とし, $\pi^{\perp}$ を π の image の $\mathbf{C}^n$ における Hermite 直交補空間への射影とすると, $G_k(\mathbf{C}^n)$ への任意の写像は, $\pi-\pi^{\perp} : S^2 \longrightarrow G_k(\mathbf{C}^n) \subset U(n)$ の形で与えられる。与えられた調和写像 φ に対する「ユニトン因子」とは, 次の 1 階の編微分方程式

$$\pi^{\perp}(d''+A'')\pi=0,$$
$$\pi^{\perp}A'\pi=0,$$

を満たす写像 $\pi-\pi^{\perp} : S^2 \longrightarrow G_k(\mathbf{C}^n) \subset U(n)$ のことである。ここで, $A:=\frac{1}{2}\varphi^{-1}d\varphi$, A の $(1,0)$-成分, $(0,1)$-成分を A', A'' で表わす。実際, 与えられた φ はこれらの有限個の積に表せる：

$$\varphi=c_0(\pi_1-\pi_1^{\perp})\cdots\cdots(\pi_r-\pi_r^{\perp}).$$

このような最小の正整数 r を φ のユニトン数とよび, また, $\varphi^{(i)}=c_0(\pi_1-\pi_1^{\perp})\cdots(\pi_i-\pi_i^{\perp})$ とおくとき, $\varphi^{(i-1)}=\varphi^{(i)}(\pi_i-\pi_i^{\perp})$ であり, $\varphi^{(i-1)}, \varphi^{(i)}$ は, それぞれ, S^2 から $U(n)$ への調和写像になっており, $\pi_i-\pi_i^{\perp}$ は $\varphi^{(i)}$ のユニトン因子である。変換 $\varphi^{(i-1)} \rightarrow \varphi^{(i)}$ をユニトン変換とよぶ。[Val88] は, ユニトン変換により写像のエネルギーが減少することに着目し, Uhlenbeck の factorization theorem の簡略な証明を与えた。[Wd88], [Wd89] は, 有理型関数のデータから調和写像を explicit に構成する方法を与えた。

§**2.5** $[M=S^2, G/K=$ compact simple Lie group except G_2, F_4, E_8 **の場合**]

この場合は, [BR86] が, Uhlenbeck の factorization theorem で用いたグラスマン多様体

$G_k(\mathbf{C}^n)$ の代わりに Hermite 対称空間 H を考え, ユニトン変換より一般の Flag 変換というものを考えて, Valli の方法を拡張し, Flag 変換はエネルギーを減少させることを導いて factorization theorem を確立した。

基点付き Loop 群 $\Omega U(n) = \{\gamma : S^1 \longrightarrow U(n) \mid \gamma(1) = e\}$ を考える。$\lambda \in S^1$ をパラメーターとして, $\gamma(\lambda)$ を λ の Fourier 級数として表したとき, λ の Polynomial になるものの集合を $\Omega_{\mathrm{alg}}U(n)$ で表す。

$$
\begin{tikzcd}
 & \Omega_{\mathrm{alg}}U(n) \arrow[d] \\
M \arrow[ur, "\Phi"] \arrow[r, "\varphi"'] & U(n)
\end{tikzcd}
$$

Polynomial Loop による filtration $\Omega_0 U(n) \subset \Omega_1 U(n) \subset \cdots \subset \Omega_{k-1}U(n) \subset \Omega_k U(n) \subset \cdots \subset \Omega U(n)$ が得られる。$\Phi = \sum_{i=0}^{r} \lambda^i T_i$ を φ の extended solution とよび, r はユニトン数に等しい。コンパクト単純リー群 G の場合に対しても, ユニトン数に相当するものが定義されている ([BG97])。

§**2.6** $[M = S^2, G/K = G_2(\mathbf{R}^n), Q^n, \mathbf{H}P^n$ **の場合**$]$

この場合は, [BEDW89], [BEDW91] の結果がある ($G/K = Q^n$ の場合には, [Wol86] の結果がある)。$G_2(\mathbf{R}^n)$ は $G_2(\mathbf{C}^n)$ に全実全測地的に埋め込んでおき, また, $\mathbf{H}P^n$ は $G_2(\mathbf{C}^{2n+2})$ に全測地的に埋め込んでおく。$\varphi : S^2 \longrightarrow G_2(\mathbf{R}^n) \subset G_2(\mathbf{C}^n)$ は, $\overline{\underline{\varphi}} = \underline{\varphi}$ をみたすものとして考える。これに, $G_2(\mathbf{C}^n)$ の場合の [BW86] の方法（上述）を適用する。Sections 2.2, 2.3 のように $\underline{\varphi}$ を考え, α, β を, それぞれ, $\underline{\varphi}$ の正則直線部分束, 反正則直線部分束とするとき,

$$
\begin{aligned}
\underline{\varphi_f} &:= \underline{\varphi} \ominus \alpha \oplus \mathrm{Im}(\partial_0 \mid_\alpha), \\
\underline{\varphi_b} &:= \underline{\varphi} \ominus \beta \oplus \mathrm{Im}(\overline{\partial}_0 \mid_\beta)
\end{aligned}
$$

によって定義される階数2のベクトル束 $\underline{\varphi_f}$ と $\underline{\varphi_b}$ は, 再び, 調和写像 $\varphi_f : M \longrightarrow G_2(\mathbf{C}^n)$ と $\varphi_b : M \longrightarrow G_2(\mathbf{C}^n)$ を定めることがわかる。ここで, $\partial_0, \overline{\partial}_0$ は同型写像の場合を考えている。このとき, 対応 $\varphi \to \varphi_f$ を forward replacement, 対応 $\varphi \to \varphi_b$ を backward replacement と呼ぶ。一般に, forward replacement を行うと, 値域は $G_2(\mathbf{R}^n)$ からはみ出してしまうが, つぎに, うまく反正則直線部分束を選んで（これを選ぶ方法は explicit に与えられる）, backward replacement を行うと isotropy order が 2 つ増加した調和写像 $\varphi_2 : S^2 \longrightarrow G_2(\mathbf{R}^n)$ を得る。これを繰り返せばよい。$\varphi : S^2 \longrightarrow Q^n$ は, 2重被覆 $Q^n \longrightarrow G_2(\mathbf{R}^n)$ を用いればよい。

$\varphi : S^2 \longrightarrow \mathbf{H}P^n \subset G_2(\mathbf{C}^{2n+2})$ の場合は, $G_2(\mathbf{C}^{2n+2})$ の四元数構造 j で不変なもの $j\underline{\varphi} = \underline{\varphi}$ と考える。以下, $G_2(\mathbf{R}^n)$ の場合と同様にできる。さらに, [BEDW89], [BEDW91] では, S^2 上の有理型関数から explicit に構成する, いわゆる, Weierstrass 型の公式に相当するアルゴリズムを得ている。

[Problem 1] 調和写像$\varphi : S^2 \longrightarrow \mathbf{Cay}P^2$ の explicit construction を確立せよ。もっと一般に, S^2 から, 上で扱われた以外の各コンパクト対称空間への調和写像の explicit な構成法を確立せよ。

[Problem 2] $genus(M) \geq 2$ のとき, 調和写像 $\varphi : M \longrightarrow G/K$ で, ユニトン数が有限でないものを見つけ, 構成せよ。

§3 無限次元ツイスター空間を用いたツイスター構成

§3.1 [対称空間への調和写像と Extended framing]

M を単連結なリーマン面とし, G/K をコンパクト対称空間で involution σ をもつとする。すなわち, $(G^\sigma)_o \subset K \subset G^\sigma$ をみたす。ここで, $G^\sigma = \{g \in G \mid \sigma(g) = g\}$ であり, $(G^\sigma)_o$ は単位元 e ($e \in G^\sigma$ に注意) を含む G^σ の連結成分である。G/K には G-不変なリーマン計量を入れておく。G, K のリー環を, それぞれ, $\mathcal{G}, \mathcal{K}$ で表し, $\mathcal{G} = \mathcal{K} + \mathcal{M}$ を標準分解とする。G の Maurer-Cartan 形式を θ とする。すなわち, $\theta(X) = (L_{g^{-1}})_* X$ for $X \in T_g(G)$ により定義される G 上の左不変な $\mathcal{G}$-値 1 次微分形式である。C^∞-写像 $\varphi : M \longrightarrow G/K$ を考えたとき, φ の framing $\Phi : M \longrightarrow G$ が存在して, $\alpha = \Phi^*\theta$ とおくと, α は M 上の $\mathcal{G}$-値 1 次微分形式であり, Maurer-Cartan 方程式 $d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] = 0$ をみたす。ここで, M 上の $\mathcal{G}$-値 1 次微分形式 α, β にたいして, $[\alpha \wedge \beta]$ は, M 上の $\mathcal{G}$-値 2 次微分形式であり,

$$[\alpha \wedge \beta](X, Y) = [\alpha(X), \beta(Y)] - [\alpha(Y), \beta(X)] \qquad X, Y \in TM$$

により定義される。逆に, 任意に M 上の $\mathcal{G}$-値 1 次微分形式 α が与えられたとき, α が Maurer-Cartan 方程式を満たすならば, $\alpha = \Phi^*\theta$ となる $\Phi : M \longrightarrow G$ が G の左移動 $\Phi \to L_g(\Phi)$ を除いて一意的に定まる。標準分解 $\mathcal{G} = \mathcal{K} + \mathcal{M}$ とリーマン面 M の余接束の複素化の分解 $T^*M^{\mathbf{C}} = T^*M^{1,0} + T^*M^{0,1}$ を用いて,

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_{\mathcal{K}} + \alpha_{\mathcal{M}}, \\ \alpha_{\mathcal{M}} = \alpha'_{\mathcal{M}} + \alpha''_{\mathcal{M}} \end{cases}$$

と分解しておく。このとき, φ が調和写像であるための必要十分条件が

$$(3.1)\qquad \begin{cases} d\alpha'_{\mathcal{M}} + [\alpha_{\mathcal{K}} \wedge \alpha'_{\mathcal{M}}] = 0, \\ d\alpha_{\mathcal{K}} + \frac{1}{2}[\alpha_{\mathcal{K}} \wedge \alpha_{\mathcal{K}}] + [\alpha'_{\mathcal{M}} \wedge \alpha''_{\mathcal{M}}] = 0 \end{cases}$$

により与えられる。実際,

$$\mu : G \times_K \mathcal{M} \ni [g, \xi] \to (\pi(g) = x, X = \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(t\mathrm{Ad}g\xi) \cdot x) \in T(G/K)$$

によって, $\pi : G \longrightarrow G/K$ に付随したベクトル束 $G \times_K \mathcal{M}$ と $T(G/K)$ との間の同型対応が与えられるが, $G \times_K \mathcal{M}$ は, $F : G \times_K \mathcal{M} \ni [g, \xi] \to (\pi(g), \mathrm{Ad}g\xi) \in G/K \times \mathcal{G}$ により, 自明束 $G/K \times \mathcal{G}$ の部分束とみなすことができる。そこで, $F \circ \mu^{-1}$ を $\beta_x(X) = (x, \mathrm{Ad}g \circ P_{\mathcal{M}}(\xi)) \in G/K \times \mathcal{G}$ で表す。ここで, $P_{\mathcal{M}} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{M}$ は$\mathcal{K}$ に沿った射影である。この $\mathcal{G}$-値１次微分形式 β を G/K の Maurer-Cartan 形式とよぶ（これは, より一般に, reductive 等質空間にたいして定義される）。$\mathcal{G}$ 上の AdG-不変内積から $G \times_K \mathcal{M}$ 上に誘導された AdG-不変計量 $< , >$を, この β で引き戻したリーマン計量 $h = \beta^* < , >$ を$T(G/K)$ に入れておく。このとき,

$$\begin{aligned} h(d\varphi(X), d\varphi(Y))_{\varphi(p)} &=< \beta(d\varphi(X)), \beta(d\varphi(Y)) >_{\varphi(p)} \\ &=< (\varphi^*\beta)(X), (\varphi^*\beta)(Y) >_p, \quad X, Y \in T_pM \end{aligned}$$

となる。従って, φ が調和写像であるための Euler-Lagrange 方程式は, $d^*\varphi^*\beta = 0$ となる。これは, G/K の標準接続 (canonical connection) が Levi-Civita 接続 ∇ と一致し, その Levi-Civita 接続の φ による引き戻しは, $\nabla^\varphi = d - \mathrm{ad}\varphi^*\beta$ で与えられることによる。いま, $\varphi^*\beta = \mathrm{Ad}\Phi \cdot \alpha_{\mathcal{M}}$ であることに注意して, Euler-Lagrange 方程式を書き下すと, $d * \alpha_{\mathcal{M}} + [\alpha \wedge *\alpha_{\mathcal{M}}] = 0$ となる。ここで, $*$ は Hodge star 作用素であり, リーマン面の性質から, $*\alpha_{\mathcal{M}} = -\sqrt{-1}\alpha'_{\mathcal{M}} + \sqrt{-1}\alpha''_{\mathcal{M}}$ であることを用いると,

$$d\alpha'_{\mathcal{M}} + [\alpha_{\mathcal{K}} \wedge \alpha'_{\mathcal{M}}] = d\alpha''_{\mathcal{M}} + [\alpha_{\mathcal{K}} \wedge \alpha''_{\mathcal{M}}]$$

が得られる。これと, α がみたす Maurer-Cartan 方程式 $d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] = 0$ の $\mathcal{K}$-成分, $\mathcal{M}$-成分を考える ($[\mathcal{M}, \mathcal{M}] \subset \mathcal{K}$ に注意) ことにより, (3.1) 式を得る。

ここで, $\lambda \in S^1 = \{e^{\sqrt{-1}x} \mid x \in \mathbf{R}\}$ にたいして,

$$\alpha_\lambda = \lambda\alpha'_{\mathcal{M}} + \alpha_{\mathcal{K}} + \lambda^{-1}\alpha''_{\mathcal{M}}$$

とおく。このとき, (3.1) は次の式と同値になる :

$$d\alpha_\lambda + \frac{1}{2}[\alpha_\lambda \wedge \alpha_\lambda] = 0 \qquad \text{for any} \quad \lambda \in S^1 \tag{3.2}$$

すなわち, α_λ が Maurer-Cartan 方程式を満たすことが φ が調和写像であるための必要十分条件であることがわかる。このとき, $\alpha_\lambda = \Phi_\lambda^* \theta$ となる写像 $\Phi_\lambda : M \longrightarrow G$ が各 $\lambda \in S^1$ にたいして存在するのであるが, これを少し視点を変えてみてみよう。σ-twisted Loop 群 $\Lambda(G,\sigma)$ を,

$$\Lambda(G,\sigma) = \{\gamma : S^1 \longrightarrow G \mid \sigma(\gamma(\lambda)) = \gamma(-\lambda)\}$$

で定義する。これには, Hilbert 多様体の構造を入れることができる。$\Lambda(G,\sigma)$ のリー環$\Lambda(\mathcal{G},\sigma)$ は,

$$\Lambda(\mathcal{G},\sigma) = \{\xi : S^1 \longrightarrow \mathcal{G} \mid \sigma(\xi(\lambda)) = \xi(-\lambda)\}$$

で与えられる。これには, Hilbert 空間の構造を入れることができる。このとき, α_λ は M 上の$\Lambda(\mathcal{G},\sigma)$-値 1 次微分形式であることが, $\mathcal{G} = \mathcal{K} + \mathcal{M}$ が σ の固有値 $1, -1$ に対応する固有空間分解であることからわかる。さらに, 任意の点 $p \in M$ にたいして $\Phi_\lambda(p) \in \Lambda(G,\sigma)$ である。従って, $\Phi_\lambda : M \longrightarrow \Lambda(G,\sigma)$ とみなすことができる。この Φ_λ を φ の *extended framing* と呼ぶ。$\varphi = \Phi_1 \cdot K$ となっている。さて, $\Lambda(\mathcal{G},\sigma)$ は Hilbert 空間であるから, その任意の元は, $\xi = \sum_{\alpha \in \mathbf{Z}} \xi_\alpha \lambda^\alpha$ と Fourier 級数で表せる。ここで,

$$\overline{\xi_\alpha} = \xi_{-\alpha}, \qquad \xi_\alpha \in \mathcal{G}^{\mathbf{C}}$$

に注意する。さらに, σ-twisted 条件から,

$$\begin{cases} \xi_\alpha \in \mathcal{K}^{\mathbf{C}} & (\alpha \text{ が偶数のとき}) \\ \xi_\alpha \in \mathcal{M}^{\mathbf{C}} & (\alpha \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

となる。定値 loop 全体の集合は K と同一視できることがわかる。従って, $\Lambda(G,\sigma)/K$ を考えることにする。また, $\Lambda(\mathcal{G},\sigma)$ は K のリー環 $\mathcal{K}$ を含むから,

$$\begin{aligned} \Lambda(\mathcal{G},\sigma) &= \mathcal{K} \oplus \Lambda_0(\mathcal{G},\sigma), \\ \Lambda_0(\mathcal{G},\sigma)^{\mathbf{C}} &= \Big(\bigoplus_{\alpha \neq 0, \alpha : even} \mathcal{K}^{\mathbf{C}} \lambda^\alpha \Big) \bigoplus \Big(\bigoplus_{\alpha : odd} \mathcal{M}^{\mathbf{C}} \lambda^\alpha \Big). \end{aligned}$$

このことにより, $\Lambda(G,\sigma)/K$ には,

$$T_o(\Lambda(G,\sigma)/K)^{1,0} = \Big(\bigoplus_{\alpha>0,\alpha:even} [\mathcal{K}^{\mathbf{C}}\lambda^\alpha]\Big) \bigoplus \Big(\bigoplus_{\alpha>0,\alpha:odd} [\mathcal{M}^{\mathbf{C}}\lambda^\alpha]\Big)$$

と宣言することにより, 無限次元複素等質空間の構造を入れることができる。さらに, ケーラー構造を入れることもできる。実際, $\Lambda(G^{\mathbf{C}},\sigma)$ のあるパラボリック部分群 $\Lambda^+(G^{\mathbf{C}},\sigma)$ があって, $\Lambda(G,\sigma)/K \cong \Lambda(G^{\mathbf{C}},\sigma)/\Lambda^+(G^{\mathbf{C}},\sigma)$ 複素等質空間表示ができる。これらのことから,

$$\Phi : \text{extended framing} \quad \Longleftrightarrow (d\Phi)(\frac{\partial}{\partial z}) \in [\mathcal{M}^{\mathbf{C}}\lambda]$$

となっている。すなわち, extended framing Φ は特殊な形をした正則写像 $\Phi : M \longrightarrow \Lambda(G^{\mathbf{C}},\sigma)/\Lambda^+(G^{\mathbf{C}},\sigma)$ である。

§**3.2** [k-**対称空間への調和写像のクラス : プリミティブ写像**]

G をコンパクト・半単純リー群とし, H を G の閉部分群とし, 等質空間 $N = G/H$ を考える。

[定義] $N = G/H$ が k-対称空間であるとは, ある位数 k の内部自己同型写像 $\tau : G \longrightarrow G$ が存在して,

$$(G^\tau)_o \subset H \subset G^\tau$$

が成り立つときをいう。ここで, $G^\tau = \{g \in G \mid \tau(g) = g\}$ であり, $(G^\tau)_o$ は, 単位元を含む G^τ の連結成分を表す。このとき, $\pi : G \longrightarrow N$ を $\pi(g) = g \cdot H$ とすると, $\hat{\tau}(g\cdot H) = \tau(g)\cdot H$ により, 位数 k の微分同相写像 $\hat{\tau} : N \longrightarrow N$ が定義される。さらに, $N \ni x = \pi(g)$ にたいして, $\hat{\tau}_x = \mathrm{Ad}g \cdot \hat{\tau}$と定めると, $\hat{\tau}_x$ は点 $x \in N$ を孤立固定点とする位数 k の微分同相写像である。また, $\hat{\tau}_x$ が各 $x \in N$ にたいして等長的になるように N に G-不変リーマン計量をいれておけば, 結局, 各点 $x \in N$ において, 位数 k の等長写像の集合 $\{\hat{\tau}_x\}$ を得る。これを, N の対称 k-構造と呼ぶ。また,

$$\hat{\tau}_z \circ \hat{\tau}_x = \hat{\tau}_x \circ \hat{\tau}_y, \quad z = \hat{\tau}_x(y), \qquad \text{for} \quad \text{any} \quad x, y \in N$$

が成り立つことも容易に確かめられる ([Kow80] を参照)。従って, $\{\hat{\tau}_x\}$ は, Kowalski の意味の「正則な対称 k-構造」を定める。従って, 我々の「k-対称空間」の定義は, Kowalski の意味の「正則な対称 k-構造」をもつリーマン多様体の存在を保証するものである。

[注意] H が G の極大トーラス (maximal torus) の中心化群 (centralizer) のときは, G/H は

一般化された旗多様体 (generalized flag manifold) と呼ばれるもので, ルート空間分解を用いて標準的な k-対称構造 (canonical k-symmetric structure) を入れることができる ([OU] を参照)。

さて, $\mathcal{G}$ に AdG-不変内積を入れておき, $\mathcal{P}$ を $\mathcal{G}$ における $\mathcal{H}$ の直交補空間とする。このとき, reductive な分解 $\mathcal{G}=\mathcal{H}\oplus\mathcal{P}$ を得る。すなわち, $\mathcal{P}$ は $\mathcal{G}$ の AdH-不変部分空間であり, よって, $[\mathcal{H},\mathcal{P}]\subset\mathcal{P}$ が成り立つ。実際, $\mathcal{G}_j$ を τ の固有値 ω^j に対応する固有空間とする。ここで$\omega=\exp(2\pi\sqrt{-1}/k)$ であり, $\mathcal{G}_j\subset\mathcal{G}^{\mathbf{C}},(j=0,1,\cdots,k-1)$ である。このとき, τ の性質より 以下のことが成り立つことが確かめられる:

$$(3.3)\qquad \begin{cases} \mathcal{H}^{\mathbf{C}}=\mathcal{G}_0, \quad \mathcal{P}^{\mathbf{C}}=\displaystyle\bigoplus_{j=1}^{k-1}\mathcal{G}_j, \\ \overline{\mathcal{G}_j}=\mathcal{G}_{-j}, \quad [\mathcal{G}_i,\mathcal{G}_j]\subset\mathcal{G}_{i+j} \qquad (\textit{index}\ \text{は}\ \mathrm{mod}\ k\ \text{で考える}) \end{cases}$$

ここで, Section 3.1 のアナロジーを考えてみよう。写像 $\psi:M\longrightarrow G/H$ を考える。ψ の G への持ち上げ $\Psi:M\longrightarrow G$ を1つとり, $\alpha=\Psi^*\theta$ とおく。$\alpha=\alpha_{\mathcal{H}}+\alpha_{\mathcal{P}},\alpha_{\mathcal{P}}=\alpha'_{\mathcal{P}}+\alpha''_{\mathcal{P}}$ と分解する。いま,

$$[\alpha'_{\mathcal{P}},\alpha''_{\mathcal{P}}]_{\mathcal{P}}=0$$

と仮定する。G/H は naturally reductive homogeneous space になており, ψ が調和写像であるための Euler-Lagrange 方程式は, Section 3.1 と同様に, $d^*\varphi^*\beta=0$ で与えられる。従って, (3.1) と同様にして, ψ が調和写像であるための必要十分条件は

$$(3.4)\qquad \begin{cases} d\alpha'_{\mathcal{P}}+[\alpha_{\mathcal{H}}\wedge\alpha'_{\mathcal{P}}]=0, \\ d\alpha_{\mathcal{H}}+\dfrac{1}{2}[\alpha_{\mathcal{H}}\wedge\alpha_{\mathcal{H}}]+[\alpha'_{\mathcal{P}}\wedge\alpha''_{\mathcal{P}}]=0 \end{cases}$$

により与えられることがわかる。しかし, (3.4) を一般的に解くのはかなり困難であるので, 上記の仮定を満たすもので特殊な写像を考える:

[定義] 写像 $\psi:M\longrightarrow G/H$ がプリミティブ (primitive) 写像であるとは, $\alpha'_{\mathcal{P}}$ が $\mathcal{G}_1$-値であるときをいう。

このとき, $\alpha''_{\mathcal{P}}=\overline{\alpha'_{\mathcal{P}}}$ より, $\alpha''_{\mathcal{P}}$ は$\mathcal{G}_{-1}$-値であるので, (3.3) より, 上記の仮定 $[\alpha'_{\mathcal{P}}\wedge\alpha''_{\mathcal{P}}]_{\mathcal{P}}=0$ を満たしていることがわかる。さらに, $k\geq 3$ のとき, プリミティブ写像 $\psi:M\longrightarrow G/H$ は$\mathcal{G}$ 上の AdG-不変内積から誘導されるG/H 上の任意の G-不変リーマン計量と M 上の共形構造類のなかで与えられる任意のリーマン計量に関して調和写像になる, すなわち, (3.4)

を満たすことが確かめられる。実際, α が満たす Maurer-Cartan 方程式 $d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] = 0$ の $\mathcal{G}_1$-成分, $\mathcal{G}_0$- 成分を取り出すと, それが (3.4) 式に一致するからである。さらに, $H \subset K$ となっている場合を考え, 分解 $\mathcal{G} = \mathcal{K} \oplus \mathcal{M}$ は τ-不変であるとする。$p : G/H \longrightarrow G/K$ を等質射影 $p(g \cdot H) = g \cdot K$ とする。このとき,

定理 3.1([Bl91], [BP94]). $k \geq 3$ とする。$\psi : M \longrightarrow G/H$ がプリミティブ写像であるとき, $\varphi = p \circ \psi : M \longrightarrow G/K$ は調和写像になる。

[証明] $\mathcal{Q}$ を $\mathcal{K}$ に含まれ, $\mathcal{G}$ 上の不変内積に関して, $\mathcal{H}$ と直交する補空間とする。このとき, $\mathcal{K} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{Q}, \mathcal{P} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{Q}$ であり, τ-不変な分解 $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{Q} \oplus \mathcal{M}$ を得る。いま, ψ の framing は, φ の framing でもあることに注意すれば, $\alpha'_{\mathcal{P}} = \alpha'_{\mathcal{M}} + \alpha'_{\mathcal{Q}}, \alpha_{\mathcal{K}} = \alpha_{\mathcal{H}} + \alpha_{\mathcal{Q}}$ であり, さらに,

$$\begin{cases} \alpha'_{\mathcal{M}} \text{ は } \mathcal{G}_1\text{–値}, & \alpha''_{\mathcal{M}} \text{ は } \mathcal{G}_{-1}\text{–値}, \\ \alpha'_{\mathcal{Q}} \text{ は } \mathcal{G}_1\text{–値}, & \alpha''_{\mathcal{Q}} \text{ は } \mathcal{G}_{-1}\text{–値} \end{cases}$$

であることがわかる。また, $[\mathcal{Q}^{\mathbf{C}}, \mathcal{M}^{\mathbf{C}}] \subset [\mathcal{K}^{\mathbf{C}}, \mathcal{M}^{\mathbf{C}}] \subset \mathcal{M}^{\mathbf{C}}$ であり, 一方, $[\alpha''_{\mathcal{Q}} \wedge \alpha'_{\mathcal{M}}]$ は $\mathcal{G}_0$-値であることから, 結局, $[\alpha''_{\mathcal{Q}} \wedge \alpha'_{\mathcal{M}}] = 0$ がわかるので,

$$\begin{aligned} [\alpha_{\mathcal{K}} \wedge \alpha'_{\mathcal{M}}] &= [\alpha_{\mathcal{H}} \wedge \alpha'_{\mathcal{M}}] + [\alpha''_{\mathcal{Q}} \wedge \alpha'_{\mathcal{M}}] \\ &= [\alpha_{\mathcal{H}} \wedge \alpha'_{\mathcal{M}}] \end{aligned}$$

を得る。また, 分解 $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \mathcal{Q} \oplus \mathcal{M}$ は, τ-不変であることから, $[\alpha_{\mathcal{H}} \wedge \alpha'_{\mathcal{P}}]_{\mathcal{M}} = [\alpha_{\mathcal{H}} \wedge \alpha'_{\mathcal{M}}]$ でなければならない。従って, (3.4) 式で, $\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{M}^{\mathbf{C}}$-成分を取り出すと, $d\alpha'_{\mathcal{M}} + [\alpha_{\mathcal{K}} \wedge \alpha'_{\mathcal{M}}] = 0$ が得られる。また, $[\alpha'_{\mathcal{M}} \wedge \alpha''_{\mathcal{M}}]_{\mathcal{M}} = 0$ に注意すれば, Maurer-Cartan 方程式 $d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] = 0$ の分解 $\mathcal{G} = \mathcal{K} + \mathcal{M}$ に関する $\mathcal{K}$-成分を取り出せば, $d\alpha_{\mathcal{K}} + \frac{1}{2}[\alpha_{\mathcal{K}} \wedge \alpha_{\mathcal{K}}] + [\alpha'_{\mathcal{M}} \wedge \alpha''_{\mathcal{M}}] = 0$ が得られる。従って, $\varphi : M \longrightarrow G/K$ は調和写像である。 [証明終]

§3.3 [プリミティブ写像の構成]

Section 3.2 で, k-対称空間へのプリミティブ写像が与えられると, それを等質射影したものが, コンパクト対称空間への調和写像を与えることをみた。では, そのプリミティブ写像を構成するには, どのようにしたらよいであろうか? つぎの定理が 1 つの解答を与える:

定理 3.2([BFPP93], [Bur95]). $d \equiv 1 \ mod \ k$ とし, $\xi_0 \in \Lambda_d = \{\xi = \sum_{j=-d}^{d} \xi_j \lambda^j \in \Lambda(\mathcal{G}, \tau)\}$ を 1 つ選ぶ。そして, つぎの微分方程式を解く:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial z} = [\xi, \lambda \xi_d + r(\xi_{d-1})] \\ \xi \mid_{z=0} = \xi_0 \end{cases}$$

この解にたいして $\Psi:\mathbf{R}^2 \longrightarrow G/H$ が存在して$\Psi^{-1}d\Psi(\partial/\partial z) = \xi_d + r(\xi_{d-1})$ であり，$\psi = \pi\circ\Psi:\mathbf{R}^2 \longrightarrow G/H$ はプリミティブ調和写像となる。

定理 3.2 により得られるプリミティブ調和写像を有限型 (finite type) のプリミティブ調和写像と呼ぶ。定理 3.2 の微分方程式に現れる $r:\mathcal{H}^{\mathbf{C}} \longrightarrow \mathcal{H}^{\mathbf{C}}$ はつぎのように定義される。まず, H はコンパクト・リー群であるから, その複素化 $H^{\mathbf{C}}$ は簡約可能 (reductive) であり岩澤分解 $H^{\mathbf{C}} = H\cdot B$ を持つ。この分解を1つとり固定しておく。対応するリー環の分解を $\mathcal{H}^{\mathbf{C}} = \mathcal{H}\oplus\mathcal{B}$ とする。$\mathcal{T}$ を $\mathcal{H}$ の極大トーラスとすると,

$$\mathcal{H}^{\mathbf{C}} = \mathcal{N}\oplus\mathcal{T}^{\mathbf{C}}\oplus\overline{\mathcal{N}}, \qquad \mathcal{B} = \sqrt{-1}\mathcal{T}\oplus\overline{\mathcal{N}}$$

ここで, $\mathcal{N}$ は正のルート空間で与えられるベキ零リー環である。さて, 任意の $\eta\in\mathcal{H}^{\mathbf{C}}$ にたいして, $\eta = \eta_{\mathcal{N}} + \eta_{\mathcal{T}^{\mathbf{C}}} + \eta_{\overline{\mathcal{N}}}$ と分解したとき,

$$r(\eta) = \eta_{\mathcal{N}} + \frac{1}{2}\eta_{\mathcal{T}^{\mathbf{C}}}$$

と定義する。このように定義すると,

$$(\eta dz)_{\mathcal{H}} = (\eta_{\mathcal{N}} + \frac{1}{2}\eta_{\mathcal{T}^{\mathbf{C}}})dz + \overline{(\eta_{\mathcal{N}} + \frac{1}{2}\eta_{\mathcal{T}^{\mathbf{C}}})d\bar{z}}$$

となっている。定理 3.2 の微分方程式は, ラックス型の微分方程式 $d\xi = [\xi,\alpha_\lambda]$ に表せて, $(\alpha_\lambda)_{\mathcal{H}} = (\xi_{d-1}dz)_{\mathcal{H}}, (\alpha_\lambda)'_{\mathcal{P}} = \lambda\xi_d dz$ となっている。実際, このようにして得られる α_λ は, Maurer-Cartan 方程式 $d\alpha_\lambda + \frac{1}{2}[\alpha_\lambda\wedge\alpha_\lambda] = 0$ をみたすことが示される。従って, $\alpha_\lambda = \Psi_\lambda^*\theta$ をみたす extended framing Ψ_λ が存在する。さらに, $\psi = \pi\circ\Psi_1:\mathbf{R}^2 \longrightarrow G/H$ はプリミティブ調和写像になる。

逆に, 有限型のプリミティブ調和写像になるための十分条件として,

定理 **3.3([BFPP93], [Bur95]).** $\psi:\mathbf{R}^2 \longrightarrow G/H$ を2重周期のプリミティブ調和写像とする。いま, $\alpha'_{\mathcal{P}}(\partial/\partial z)$ が $\mathbf{R}^2$ の稠密な部分集合上で半単純であると仮定する。このとき, ψ は有限型である。

$\alpha'_{\mathcal{P}}(\partial/\partial z)$ が半単純とは, G が Adjoint で作用する複素ベクトル空間 $\mathcal{G}^{\mathbf{C}}$ にたいして, $\mathcal{G}^{\mathbf{C}}$ の自己同型写像として作用する $\mathrm{ad}\alpha'_{\mathcal{P}}(\partial/\partial z)$ が対角化可能であるときをいう。定理 3.2 の微分方程式の解 ξ を得るためには, λ^{-1} の係数から始めて, λ^j の係数を順々に求めていく

のである。このとき, $\alpha'_{\mathfrak{p}}(\partial/\partial z)$ が半単純であると, 係数を順々に求めるためのヒエラルキー (hierarchy) が存在することが本質的である。リーマン面からの調和写像は, リーマン面上のリーマン計量の取り方によらないので, 平坦2次元トーラスの平坦計量を共形変換して得られる任意の2次元トーラス T^2 からのプリミティブ調和写像にたいして, 定理 3.3 を適用できることに注意しておこう。

以上のことから, つぎのような問題を考えることは自然であろう：

[Problem 3] コンパクト対称空間への調和写像 $\varphi : M \longrightarrow G/K$ が任意に与えられたとき, いつ φ はプリミティブ写像 $\psi : M \longrightarrow G/H$ に lift するか？また, そのような ψ が得られたとして, いつ ψ は有限型になるか？

§4 トーラス面からコンパクト対称空間への調和写像

§4.1 [有限型のプリミティブ写像の射影として得られる対称空間への調和写像]

定理 **4.1([BFPP93]).** T^2 から階数1のコンパクト対称空間への非共形的調和写像は有限型である。

定理 **4.2([Bur95]).** T^2 から, 標準的球面 S^n または 標準的計量をもつ (*Fubini-Study* 計量) 複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ への (弱) 共形的かつ非超極小な調和写像は有限型である。

ここでは, $\mathbf{C}P^n$ の場合の定理 4.1, 4.2 の別証明とともに, その一般化を考えてみよう。

[$G/K = G_k(\mathbf{C}^n)$ **の場合**]

$G_k(\mathbf{C}^n)$ により, $\mathbf{C}^n$ の複素 k-次元部分空間全体のなす複素グラスマン多様体を表す。$\varphi : M \longrightarrow G_k(\mathbf{C}^n)$ を isotropy order r の調和写像とする。Section 2.3 で定義された A^r_φ を考える。$G/H = SU(n)/S(U(k_0) \times U(k_1) \times \cdots \times U(k_{r-1}) \times U(n - \sum_{j=0}^{r-1} k_j))$ とする。ここで, $k_0 = k$ と仮定しておく。これは,

$$F^r_x(G/K)$$

$$=\{x = P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_{r-1} \subset P_r = T^{1,0}_x(G/K) \mid \text{各 } P_j \text{ は} \sum_{i=0}^{j} k_i \text{ 次元複素部分空間}\}$$

をファイバーとするファイバー束 $p : F^r(G/K) \longrightarrow G/K$ を考えると, $SU(n)$ が $F^r(G/K)$ に推移的に作用し, また, ある固定した点における等方部分群が

$$S(U(k_0) \times U(k_1) \times \cdots \times U(k_{r-1}) \times U(n - \sum_{j=0}^{r-1} k_j))$$

であることから, $F^r(G/K) = G/H$ であることがわかる。$w_0 = P_0$ とし, P_{j-1} の P_j における Hermite 直交補空間を w_j で表すことにすると, 各 $w_j (j = 0, 1, \cdots, r)$ は k_j 次元の複素部分空間になり, G/H の各点は $(w_0, w_1, \cdots, w_r)$ と表せる。いま, $p(w_0, w_1, \cdots, w_r) = w_0$ となっていることに注意する。$\varphi : M \longrightarrow G/K$ に話しを戻そう。$\underline{R} = \underline{C^n} \ominus (\oplus_{j=0}^{r-1} G^{(j)}(\varphi))$ とする。ただし, $G^{(0)}(\varphi) = \underline{\varphi}$ である。Gauss 束 $G^{(j)}(\varphi) \to M$ の, 任意の点 $x \in M$ におけるファイバーを, $G^{(j)}(\varphi)_x$ で表すとき, 写像 $\psi : M \longrightarrow G/H$ を

$$\psi(x) := (G^{(0)}(\varphi)_x, G^{(1)}(\varphi)_x, \cdots, G^{(r-1)}(\varphi)_x, (\underline{R})_x) \in G/H$$

により定義することができる。つぎに, $\omega = \exp(2\pi\sqrt{-1}/(r+1))$ とおいて, $Q \in G = SU(n)$ を

$$Q = \omega^j \quad \text{on} \quad w_j \qquad (j = 0, 1, \cdots, r)$$

により定める。$\tau = \mathrm{Ad}\tau$ と定義すれば, $\tau : G \longrightarrow G$ は位数 $r+1$ の内部自己同型写像であり, $(G^\tau)_o \subset H \subset G^\tau$ をみたす。従って, G/H には $(r+1)$-対称空間の構造を入れることができる (Section 3.2 を参照)。さらに, G/H の Maurer-Cartan 形式 β の ψ による引き戻しは,

$$(\psi^*\beta)(\partial/\partial z) \in \bigoplus_{j=0}^{r-2} \mathrm{Hom}(G^{(j)}(\varphi), G^{(j+1)}(\varphi)) \oplus \mathrm{Hom}(G^{(r-1)}(\varphi), \underline{R}) \oplus \mathrm{Hom}(\underline{R}, G^{(0)}(\varphi))$$

となっている（これは, φ の Gauss 束の作り方よりわかる）。一方, τ の定義により, 例えば, $\mathrm{Hom}(G^{(j)}(\varphi), G^{(j+1)}(\varphi))$ の任意の切断 $s_{j+1} \otimes s_j^{-1}$ にたいして, $\tau(s_{j+1} \otimes s_j^{-1})_o = \omega^{j+1}\omega^{-j} s_{j+1} \otimes s_j^{-1} = \omega s_{j+1} \otimes s_j^{-1}$ であるから, $\mathrm{Hom}(G^{(j)}(\varphi)_o, G^{(j+1)}(\varphi)_o)$ は $\mathcal{G}_1$ に含まれることがわかる。ここで, o は G/H の原点であり, 原点 o では, $\Psi = I$ となっているので, $\psi^*\beta = \alpha_{\mathcal{P}}$ となっている。こうして, $\psi : M \longrightarrow G/H$ はプリミティブ写像であることがわかる。さらに, つぎがいえる：

定理 4.3([Uda95]). $\varphi : T^2 \longrightarrow G_k(\mathbf{C}^n)$ を *isotropy order* r の調和写像とする。A_φ^r が T^2 の稠密な部分集合上で半単純かつ可逆と仮定する。このとき, φ は有限型のプリミティブ写像 $\psi : T^2 \longrightarrow SU(n)/S(U(k) \times U(k) \times \cdots \times U(k) \times U(n-rk))$ に *lift* する。

[Problem 4] φ 自体, 有限型の調和写像であるか？

[注意] これについては, 最近, 肯定的な解答が得られた ([OU] を参照)。

系 **4.1.** $\varphi : T^2 \longrightarrow \mathbf{C}P^{n-1}$ を *isotropy order* 有限の調和写像とする。このとき, φ は有限型である。

複素射影空間の場合は, isotropy order $r = 1$ のときが, 非共形的調和写像であり, $r \geq 2$ のときが弱共形的調和写像である。φ が非超極小とは, φ の isotropy order が有限の場合をいう。従って, 定理 4.3 を適用できる。また, $F^1(\mathbf{C}P^{n-1}) = \mathbf{C}P^{n-1}$ であることに注意する。

系 **4.2.** $\varphi : T^2 \longrightarrow G_2(\mathbf{C}^4)$ を弱共形的でかつ *isotropy order* が有限とする。このとき, φ 自体, 有限型であるか, または, ある調和写像 $T^2 \longrightarrow \mathbf{C}P^3$ から *extension* という方法で構成される。

この場合, $\underline{\varphi}$ は階数 2 のベクトル束であり, $\mathrm{rank}(\partial_0) = 2$ ならば, isoropy order は必然的に 1 となる。$\mathrm{End}(\underline{\varphi})$ の切断を $\underline{\varphi}$ の適当なユニタリ基底を用いて表したとき,

$$\varphi : \text{弱共形的} \quad \Longleftrightarrow \mathrm{trace} A^1_{\varphi} = 0$$

がわかる。よって, $\mathrm{Det} A^1_{\varphi} \neq 0$ ならば, 定理 4.3 により, φ は有限型であることがわかる。$\mathrm{Det} A^1_{\varphi} \equiv 0$ となる場合, あるいは, $r = 2$ となる場合 (isotropy order が有限ということから $r \geq 3$ となる場合は起こり得ない) は, $\varphi_1 : T^2 \longrightarrow \mathbf{C}P^3$ への調和写像に帰着される。

[Problem 5] 弱共形的調和写像 $\varphi : T^2 \longrightarrow \mathbf{H}P^{n-1}$ $(n \geq 5)$ を分類せよ ($n = 2$ の場合は [FPPS92], $n = 3, 4$ の場合は [Uda97] を参照)。また, $\mathbf{Cay}P^2$ についてはどうか？

[Problem 6] T^2 から階数が 2 以上の複素グラスマン多様体への非共形的, または, 弱共形的調和写像を分類せよ。

§4.2 [Dressing 作用と dressing 変換]

$\psi : M \longrightarrow G/H$ を k-対称空間へのプリミティブ調和写像とし, $\Psi_\lambda : M \longrightarrow \Lambda(G, \tau)$ を extended framing とする。岩澤分解 $H^{\mathbf{C}} = H \cdot B$ を 1 つとり固定する。いま,

$$\Lambda(G^{\mathbf{C}}, \tau) = \{\gamma : S^1 \longrightarrow G^{\mathbf{C}} \mid \tau(\gamma(\lambda)) = \gamma(\omega\lambda)\},$$

$$\Lambda^+(G^{\mathbf{C}}, \tau) = \{\gamma \in \Lambda(G^{\mathbf{C}}, \tau) \mid \gamma \text{ extends holomorphically to } D \longrightarrow G^{\mathbf{C}}, \gamma(0) \in B\}$$

とおく。$D = \{\lambda \in \mathbf{C} \mid |\lambda| < 1\}$ である。すなわち, $\Lambda^+(G^{\mathbf{C}}, \tau)$ の各元は, λ のマイナスのベキ乗の項を含まず, ゼロ次の項は一般には $H^{\mathbf{C}}$ の元であるが, 岩澤分解における B-成分に値をもつものを考える。それは, λ のゼロ次の項の H-成分は $\Lambda(G, \tau)$ に含まれるからである。このとき, Pressly-Segal の結果を利用して, Dorfmeister-Pedit-Wu は, つぎのことを示した：

定理 **4.4([DPW94]).**

$$\Lambda(G,\tau)\times\Lambda^+(G^{\mathbf{C}},\tau)\ni(a,b)\longrightarrow a\cdot b\in\Lambda(G^{\mathbf{C}},\tau)$$

は, 上への微分同相写像である。

これにより, Section 3.2 で現れた無限次元複素等質空間の一般化

$$\Lambda(G,\tau)/H=\Lambda(G^{\mathbf{C}},\tau)/\Lambda^+(G,\tau)$$

が得られる。

$$\Psi_\lambda^{-1}d\Psi_\lambda=\lambda\alpha'_{\mathcal{P}}+\alpha_{\mathcal{H}}+\lambda^{-1}\alpha''_{\mathcal{P}}$$

であった。

[Dressing 作用] $\Lambda^+(G^{\mathbf{C}},\tau)\ni g$ にたいして, $g\cdot\Psi_\lambda$ を考えると, これは, $\Lambda(G^{\mathbf{C}},\tau)$ に値をもつから, 定理 4.4 より,

$$g\cdot\Psi_\lambda=\Phi_\lambda\cdot b,$$

と分解される。ここで, $\Phi_\lambda\in\mathrm{Hom}(M,\Lambda(G,\tau)), b\in\mathrm{Hom}(M,\Lambda^+(G^{\mathbf{C}},\tau))$ である。Φ_λ の性質をもう少し調べるために, $\Phi_\lambda^{-1}d\Phi_\lambda$ を計算してみよう：

$$\Phi_\lambda^{-1}d\Phi_\lambda=\mathrm{Ad}b\cdot\Psi_\lambda^{-1}d\Psi_\lambda-db\cdot b^{-1}$$

となる。$b_0=b\mid_{\lambda=0}$ とおくと, $\Psi_\lambda^{-1}d\Psi_\lambda$ の形と, b が λ のマイナスのベキ乗の項を含まないという事実から,

$$\lambda\Phi_\lambda^{-1}d\Phi_\lambda\mid_{\lambda=0}=\mathrm{Ad}b_0\cdot\alpha''_{\mathcal{P}}$$

となる。このことから,

$$\Phi_\lambda^{-1}d\Phi_\lambda=\lambda\hat{\alpha}'_{\mathcal{P}}+\hat{\alpha}_{\mathcal{H}}+\lambda^{-1}\hat{\alpha}''_{\mathcal{P}}$$

であることがわかる。従って, Φ_λ も, あるプリミティブ調和写像の extended framing になっている。こうして得られる Φ_λ を $\Phi_\lambda=g\sharp\Psi_\lambda$ と表し, この g の作用を dressing 作用と呼ぶ。

[Dressing 変換] Dressing 作用によって得られる Maurer-Cartan 形式間の変換式は, つぎで

与えられる：

$$\begin{cases} \hat{\alpha}'_{\mathcal{P}} = \mathrm{Ad}b_0 \cdot \alpha'_{\mathcal{P}} + [b_1 \cdot b_0^{-1}, \hat{\alpha}'_{\mathcal{H}}] - \partial(b_1 \cdot b_0^{-1}), \\ \hat{\alpha}''_{\mathcal{P}} = \mathrm{Ad}b_0 \cdot \alpha''_{\mathcal{P}}, \\ \hat{\alpha}_{\mathcal{H}} = \mathrm{Ad}b_0 \cdot \alpha'_{\mathcal{H}} - \partial b_0 \cdot b_0^{-1} \\ \hat{\alpha}''_{\mathcal{H}} = \mathrm{Ad}b_0 \cdot \alpha''_{\mathcal{H}} + [b_1 \cdot b_0^{-1}, \hat{\alpha}''_{\mathcal{P}}] - \overline{\partial} b_0 \cdot b_0^{-1} \end{cases}$$

これを, dressing 変換と呼ぼう。ここで, $b_1 = \lambda^{-1}(b - b_0)\,|_{\lambda=0}$ である。

定理 4.5([BP95]). $\psi : \mathbf{R}^2 \longrightarrow G/H$ を有限型のプリミティブ調和写像とする。いま, $\alpha'_{\mathcal{P}}(\partial/\partial z)$ は半単純であると仮定する。このとき, α_λ は, ある真空解 Ψ^0_λ が存在して, $(\Psi^0_\lambda)^*\theta$ の *dressing* 変換により得られる。

実際には, [BP95] では, より大きい Loop 群の岩澤分解を用いて, ψ の extended framing が, 真空解の dressing 作用として得られることを示している。真空解 Ψ^0_λ とは, $A \in \mathcal{G}_1$ かつ $[A, \overline{A}] = 0$ をみたす A にたいして, $\Psi^0_\lambda = \exp(\lambda A z + \lambda^{-1}\overline{A}\overline{z})$ によって与えられるものである。このとき, $(\Psi^0_\lambda)^{-1} d\Psi^0_\lambda = \lambda(Adz) + \lambda^{-1}(\overline{A}d\overline{z})$ であるから, $\alpha'_{\mathcal{P}} = Adz, \alpha_{\mathcal{H}} = 0$ となっている。

系 4.3. $\varphi : T^2 \longrightarrow \mathbf{C}P^{n-1}$ を *isotropy order* r の調和写像とする。このとき, α_λ は, つぎの A で定義される真空解による $(\Psi^0_\lambda)^*\theta$ の *dressing* 変換で得られるものに同値である：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

ここで, A は n 次の正方行列であり, $\mathbf{0}$ は $(n-r-1)$ 項の縦ゼロベクトルである。

これは, 系 4.1 と定理 4.5, 及び (3.4) 式がつぎの 3 つのどの変換を施しても不変である

ことから得られる：

$$\begin{cases} (1)\ z \longrightarrow cz,\ (c \in \mathbf{C}^*), \\ (2)\ \alpha'_{\mathcal{P}} \to \zeta\alpha'_{\mathcal{P}},\ \alpha''_{\mathcal{P}} \to \zeta^{-1}\alpha''_{\mathcal{P}},\ \alpha_{\mathcal{H}} \to \alpha_{\mathcal{H}}, \quad (\zeta \in S^1), \\ (3)\ \mathbf{H}\text{–変換, すなわち, 任意の } h \in \mathbf{H} = \mathrm{Hom}(M, H) \text{ にたいして,} \\ \qquad \alpha_{\mathcal{P}} \to \mathrm{Ad}h \cdot \alpha_{\mathcal{P}}, \quad \alpha_{\mathcal{H}} \to \mathrm{Ad}h \cdot \alpha_{\mathcal{H}} - dh \cdot h^{-1} \\ \qquad \text{なる変換} \end{cases}$$

[Problem 7] T^2 から階数が２以上のグラスマン多様体への isotropy order が有限の調和写像で $\alpha'_{\mathcal{P}}(\partial/\partial z)$ が半単純でないものも, ある特殊解 (真空解に相当する解) の dressing 作用 (あるいは dressing 変換) として得られるか？

Bibliography

[Bar75] J. Barbosa, *On minimal immersions of S^2 into S^{2n}*, Trans. Amer. Math. Soc. **210** (1975), 75-106.

[BEDW89] A. Bahy-El-Dien and J.C. Wood, *The explicit construction of all harmonic two spheres in $G_2(\mathbf{R}^n)$*, J. reine angew. Math. **398** (1989), 36-66.

[BEDW91] A. Bahy-El-Dien and J.C. Wood, *The explicit construction of all harmonic two spheres in quaternionic projective spaces*, Proc. London Math. Soc. **62** (1991), 202-224.

[BFPP93] F.E. Burstall, D. Ferus, F. Pedit and U. Pinkall, *Harmonic tori in smmetric spaces and commuting Hamiltonian systems on loop algebras*, Ann. of Math. **138** (1993), 173-212.

[BG97] F.E. Burstall and M.A. Guest, *Harmonic two-spheres in compact symmetric spaces, revisited*, Math. Ann. **309** (1997), 541-572.

[Bl91] M. Black, *Harmonic maps into homogeneous spaces*, Pitman Res. Notes in Math., vol. **255**, Longman, Harlow, 1991.

[Bns82] D. Burns, *Harmonic maps from $\mathbf{C}P^1$ to $\mathbf{C}P^n$*, Harmonic maps, Proc. New Orleans, 1980, Lecture Notes in Math. **949**, Springer, Berlin, 1982, pp48-56.

[BP94] F.E. Burstall and F. Pedit, *Harmonic maps via Adler-Kostant-Symes theory*, Harmonic Maps and Integrable Systems(A. Fordy and J.C. Wood, eds.), Vieweg, 1994, pp. 541-572.

[BP95] F.E. Burstall and F. Pedit, *Dressing orbits of harmonic maps*, Duke Math. J. **80** (1995), 353-382.

[BR86] F.E. Burstall and J.H. Rawnsley, *Sphères harmoniques dans les groupes de Lie compacts et courbes holomorphes dans les espaces homogènes*, C.R. Acad. Sci. Paris **302**(1986), 709-712.

[BR90] F.E. Burstall and J.H. Rawnsley, *Twistor Theory for Riemannian Symmetric Spaces*, Lecture Notes in Math. **1424**, Springer, Berlin, 1990.

[BS87] F.E. Burstall and S.M. Salamon, *Tournaments, flags and harmonic maps*, Math. Ann. **277**(1987), 249-265.

[Bur95] F.E. Burstall, *Harmonic tori in spheres and complex projective spaces*, J. reine angew Math. **469** (1995), 149-177.

[BW86] F.E. Burstall and J.C. Wood, *The construction of harmonic maps into complex Grassmannians*, J. Differential Geom. **23** (1986), 255-297.

[Cal67] E. Calabi, *Minimal immersions of surfaces in Euclidean spaces*, J. Differential Geom. **1** (1967), 111-125.

[Cal67-2] E. Calabi, Quelques applications de l'analyse complexe aux surfaces d'aire minima, Topics in Complex manifolds, Presses de Universite de Montreal, 1967, pp. 59-81.

[Ch70] S.S. Chern, *On the minimal immersions of the two-sphere in a space of constant curvatures*, Problems in Analysis, Symposium in Honor of Solomon Bochner, Princeton Univ. Press, 1970, pp. 27-40.

[ChW87] S.S. Chern and J.G. Wolfson, *Harmonic maps of the two-sphere into a complex Grassmann manifold II*, Ann. of Math. **125** (1987), 301-335.

[DPW94] J. Dorfmeister, F. Pedit and H. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Comm. Anal. Geom.

[EW83] J. Eells and J.C. Wood, *Harmonic maps from surfacesto complex projective spaces*, Adv. in Math. **49**(1983), 217-263.

[FPPS92] D. Ferus, F. Pedit, U. Pinkall and I. Sterling, *Minimal tori in S^4*, J. reine angew. Math. **429** (1992), 1-47.

[GO93] M.A. Guest and Y. Ohnita, *Group actions and deformations for harmonic maps*, J. Math. Soc. Japan **45** (1993), 671-704.

[Hit90] N.J. Hitchin, *Harmonic maps from a 2-torus to the 3-sphere*, J. Differential Geom. **31** (1990), 627-710.

[Kow80] O. Kowalski, *Generalized Symmetric Spaces*, Lecture Notes in Math. **805**, Springer, Berlin, 1980.

[MO] M. Mukai and Y. Ohnita, *Geometry of the moduli spaces of harmonic maps into Lie groups via gauge theory over Riemann surfaces*, a preprint.

[OU] Y. Ohnita and S. Udagawa, *Harmonic maps of finite type into generalized flag manifolds and twistor fibrations*, in preparation.

[Ram84] J. Ramanathan, *Harmonic maps from S^2 to $G_{2,4}$*, J. Differential Geom. **19**(1984), 207-219.

[Uda95] S. Udagawa, *Harmonic maps from a two-torus into a complex Grassmann manifold*, International J. Math. **6** (1995), 447-459.

[Uda97] S. Udagawa, *Harmonic tori in quaternionic projective 3-spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 275-285.

[Uhl89] K.K. Uhlenbeck, *Harmonic maps into Lie groups(Classical solutions of the chiral model)*, J. Differential Geom. **30** (1989), 1-50.

[Val88] G. Valli, *On the energy spectrum of harmonic 2−spheres in unitary groups*, Topology **277**(1988), 129-136.

[Wd88] J.C. Wood, *The explicit construction and parametrization of all harmonic maps from the two-sphere to a complex Grassmannian*, J. reine angew. Math. **386**(1988), 1-31.

[Wd89] J.C. Wood, *Explicit construction and parametrization of harmonic two-spheres in the unitary group*, Proc. London Math. Soc. **58**(1989), 608-624.

[Wol85] J.G. Wolfson, *On minimal two-spheres in Kähler manifolds of constant holomorphic sectional curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **290**(1985), 627-646.

[Wol86] J.G. Wolfson, *Harmonic maps of the two-sphere into the complex hyperquadric*, J. Differential Geom. **24** (1986), 141-152.

[Wol88] J.G. Wolfson, *Harmonic sequences and harmonic maps of surfaces into complex Grassmann manifolds*, J. Differential Geom. **27** (1988), 161-178.